

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 7**

**A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη.»

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  με  $x \in \mathbb{R}$  έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

**β)** Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**γ)** Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ .

**δ)** Αν η  $f$  είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ .

**ε)** Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

**B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

**Μονάδες 8**

**B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 4**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.)

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους  $x$  m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του  $x$ , είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8).$$

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

**Μονάδες 10**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με  $5 \text{ m}^2$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με  $\alpha > 1$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του  $\alpha > 1$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

**Μονάδες 3**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ , τέτοια ώστε η συνάρτηση  $f$  να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_1$  και τοπικό ελάχιστο στο  $x_2$ .

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = f(1)$  είναι αδύνατη στο  $(\alpha, x_2)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Αν  $\alpha = 2$  να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > -\frac{32}{15} .$$

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**